CÁCH CHIA ĐA THỨC BẰNG LƯỢC ĐỒ HOOC-NE

I. Lược đồ Hooc-ne

1. Công dụng:

Dùng để chia một đa thức bậc n có dạng $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x^1 + a_n$ cho đa thứ $(x-\alpha)$

Lợi dụng khả năng chia đa thức nhanh chóng, sõ đồ Hooc-ne thường được dùng nhiều nhất trong việc giải phương trình bậc 3 (hay bậc cao hơn), khi ta đã biết được một nghiệm của phương trình (đề cho hay tự nhẩm).

2. Cách chia:

Thuật toán Hooc-ne được hình thành từ cách chia đa thức kinh điển mà ta đã từng đươc học ở lớp 8. Tuy nhiên nếu áp dụng phương pháp sơ đồ Hooc-ne các bạn sẽ có một cách tính nhanh tuyệt vời vừa tiết kiệm thời gian mà lại chính xác.

Gia sử cho đa thức: $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x^1 + a_n$. Khi đó đa thức thương $g(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-1}$ được xác định theo lượt đồ sau:

	a_0	a_1	....	a_{n-1}	a_n
α	$b_0 = a_0$	$b_1 = b_0\alpha + a_1$		$b_{n-1} = b_{n-2}.\alpha + a_{n-1}$	$r = b_{n-1}.\alpha + a_n$

Trong lược đồ gồm 2 hàng: Hàng trên chứa hệ số của đa thức $f(x)$ hàng dưới chứa hệ số tìm được của $g(x)$.

Bước 1: Sắp xếp các hệ số của đa thức $f(x)$ theo ẩn giảm dần và đặt số α vào vị trí đầu tiên của hàng 2. Nếu trong đa thức mà khuyết ẩn nào thì hệ số của nó coi như bằng 0 và ta vẫn phải cho vào lược đồ.

Bước 2: Hạ hệ số a_0 ở hàng trên xuống hàng dưới cùng cột. Đây cũng chính là hệ số đầu tiên của $g(x)$ tìm được, tức là: $b_0 = a_0$

Bước 3: Lấy số α nhân với hệ số vừa tìm được ở hàng 2 rồi cộng chéo với hệ số hàng 1. Ta có: $b_1 = \alpha.b_0 + a_1$

Quy tắc cần nhớ: **"Nhân ngang, cộng chéo"**

Bước 4: Cứ làm như vậy cho tới hệ số cuối cùng ta sẽ có kết quả:

$$f(x)=(x-\alpha).g(x)+r$$

Chú ý:

+ Bậc của đa thức $g(x)$ luôn nhỏ hơn bậc của đa thức $f(x)$ 1 đơn vị vì đa thức chia $x-\alpha$ có bậc là 1.
+ Nếu $r=0$ thì đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ và $x=\alpha$ sẽ là một nghiệm của đa thức $f(x)$.

Ví dụ 1:

Thực hiện phép chia $\mathbf{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$ cho **(x-2)**

Ta thực hiện phép chia bằng lược đồ Hooc-ne như bảng sau:

	$a_0=1$	$a_1=2$	$a_2=-5$	$a_3=-6$
$\alpha=2$	$b_0 = a_0 = 1$	$b_1= 2.1+2 = 4$	$b_2 = 2.4+(-5)= 3$	$b_3 = 2.3 + (-6) = 0$

Cuối cùng, ta có $\mathbf{(x^3+2x^2-5x-6)/(x-2)=(x^2+4x+3)}$

Hay: $\mathbf{(x^3+2x^2-5x-6)=(x-2).(x^2+4x+3)}$

Ví dụ 2:

Không dùng máy tính giải phương trình bậc 3 sau: $\mathbf{x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0}$.

Ta làm như sau:
Dễ thấy phương trình trên có 1 nghiệm x=1 (thế x=1 vào biểu thức trên sẽ thấy đa thức =0).Sau khi nhẩm được nghiệm x=1,ta chia đa thức $\mathbf{(x^3+5x^2+2x-8)}$cho **(x-1).** Dùng sõ đồ Horner như sau:

	$a_0=1$	$a_1=5$	$a_2=2$	$a_3=-8$
$\alpha=1$	$b_0 = a_0 = 1$	$b_1= 1.1+5 = 6$	$b_2 = 1.6+2 = 8$	$b_3 = 1.8 + (-8) = 0$

Ta được: $\mathbf{x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = (x-1)(x^2+6x+8)}$.Bây giờ, ta chỉ việc giải phương trình bậc hai $\mathbf{x^2+6x+8=0}$, bạn sẽ dễ dàng tìm được 2 nghiệm còn lại là $\mathbf{x_2=-2}$ và $\mathbf{x_3=-4}$

Vậy, ta kết luận phương trình đã cho có 3 nghiệm: $\mathbf{x_1 = 1; x_2=-2, x_3=-4}$
Lưu ý trong việc giải phương trình nếu làm đúng thì số cuối cùng của hàng thứ 2 phải là số 0, nếu khác số 0 thì nghĩa là bạn có chỗ nào đó làm sai, nên coi kĩ lại.

II. Nghiệm hữu tỷ của đa thức một biến bậc n

Giả sử có đa thức: $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x^1 + a_n \;\; (a_0 \neq 0)$

Ta có định lý sau:

Nếu $a_{0,}a_1, a_2, ..., a_n$ là các hệ số nguyên của $f(x)$ thì nghiệm hữu tỷ của $f(x)$ **nếu có** sẽ là $x = \frac{p}{q}$, trong đó: +p và q là hai số nguyên tố cùng nhau (ước chung duy nhất là 1) + p là ước của a_n, q là ước của a_0.

Qua định lý trên ta có thể rút ra cách tìm nghiệm hữu tỷ của đa thức bất kì (nếu có) như sau:

+ Tìm tất các ước m của a_n và tất cả các ước n của a_0. + Lần lượt lấy các giá trị m chia cho lần lượt các gì trị n và tính $f\left(\frac{m_i}{n_j}\right)$, nếu $f\left(\frac{m_i}{n_j}\right) = 0$ thì $\frac{m_i}{n_j}$ chính là nghiệm.

Qua đó ta sẽ giới hạn được những giá trị **có thể** nào là nghiệm của đa thức, từ đó có thể dùng chức năng CALC của máy tính kiểm tra nghiệm dễ dàng giá trị nào là nghiệm.

Việc nhẩm nghiệm càng nhanh chóng và đơn giản hơn nếu $a_0 = 1$.

Tự viết ra một đa thức bậc bất kì và kiểm tra định lý trên nhé!